

2021(令和3)年度
東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻
博士課程前期2年の課程

【一般選抜】

数 学 試 験 問 題

2020年8月25日

試験時間:9時30分～11時30分(120分)

<注意事項>

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、受験記号番号を記入すること。
3. 大問4題について全て解答すること。
4. 大問1題につき1枚の答案用紙を使用すること。ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙2枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。

問題 1

(1) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + 1) - x^2}{1 - \cos x^2}$$

(2) 次の微分方程式に関して問題に答えよ。

$$-x \frac{dy}{dx} = 4x + 4x^2 + (4x + 1)y + y^2 \quad \text{式(1)}$$

(a) $z = y + 2x$ のとき、式(1)を x と z を用いて表せ。

(b) 式(1)を解け。

問題2

- (1) (x, y, z) 空間におけるスカラー場 φ 、ベクトル場 \mathbf{A} について、以下の等式が成り立つことを示せ。

$$(i) \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \mathbf{0}$$

$$(ii) \operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{div}\mathbf{A}$$

- (2) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ をそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルとするとき、

ベクトル場 $\mathbf{B} = (2x + y)\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ について、以下の線積分を求めよ。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$$

ただし、 C は、 $C1: \mathbf{r} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + \theta\mathbf{k} (0 \leq \theta < \pi)$ 、および

$C2: \mathbf{r} = \cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\theta\mathbf{j} + \theta\mathbf{k} (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$ で表される曲線とする。

問題3

次の(1)から(4)に答えよ。

(1) 次の行列：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

の全ての固有値を求めよ。

(2) 行列 \mathbf{A} の固有値が重複しないために α, β が満たすべき条件を書き下せ。

(3) 次の行列：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

の全ての固有値を求めよ。

(4) $\beta = 2\sqrt{2\alpha}$ の時、 \mathbf{B} を対角化せよ。

問題4

1 から 6 の目がある 2 個のサイコロがある。これらの 2 個のサイコロを 216 回投げたところ、出た目の和は以下の表にまとめる結果となった。2 つのサイコロを一度に投げて出る目は独立であるとして、以下の問いに答えよ。なお、自由度 10 の χ^2 分布の 5% 点は 18.31 である。

目の和	観測度数
2	2
3	9
4	24
5	20
6	27
7	42
8	33
9	30
10	12
11	15
12	2

- (1) 2 個のサイコロについていずれの目も出る確率が等しい場合、出る目の和の平均と分散を求めよ。
- (2) 2 個のサイコロについていずれの目も出る確率が等しい場合、出る目の和の期待度数を求めよ。
- (3) 表の結果から、これらの 2 個のサイコロの出る目には偏りが無いといえるか。 χ^2 の値を求めて 5% 有意水準で検定せよ。