

平成 30 年度

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻

博士課程前期 2 年の課程

【一般選抜】

数 学 試 験 問 題

平成 29 年 8 月 29 日

試験時間:9 時 30 分～11 時 30 分(120 分)

<注意事項>

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、受験記号番号を記入すること。
3. 大問 4 題について全て解答すること。
4. 大問 1 題につき 1 枚の答案用紙を使用すること。ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙 2 枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、持ち帰らないこと。

問題 1

- (1) 次の広義積分を求めよ。

$$\iint_{\substack{0 < x \leq \pi/2 \\ 0 < y \leq \cos^2 x}} \frac{dx dy}{\sqrt{\sin^2 x + y}}$$

- (2) 次の関数の極値を求めよ。

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2) \exp\left(-\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right), \quad (a > b > 0)$$

- (3) 図 1 のような水の供給と流出が同時に起こる断面積 S のタンクがある。単位時間当たりの水の供給量を I とし一定値とする。また、時刻 t における単位時間当たりの水の流出量を $O(t)$ とし、 $O(t) = ay(t)$ の関係にあるものとする。 a を正の定数、時刻 t における水面の高さを $y(t)$ として以下の間に答えよ。

- (a) 時刻 t における水面の高さ $y(t)$ の一般解を微分方程式を用いて求めよ。また、 $t \rightarrow \infty$ において収束する水面の高さを求めよ。
- (b) 前記のタンクにおいて、 $y(t)$ は時刻 $t > 0$ で単調減少であり 10 秒後に $t = 0$ の $4/5$ の高さとなった。 $t = 0$ における水面の高さ $y(0)$ を I 、 S 、 a を用いて示せ。

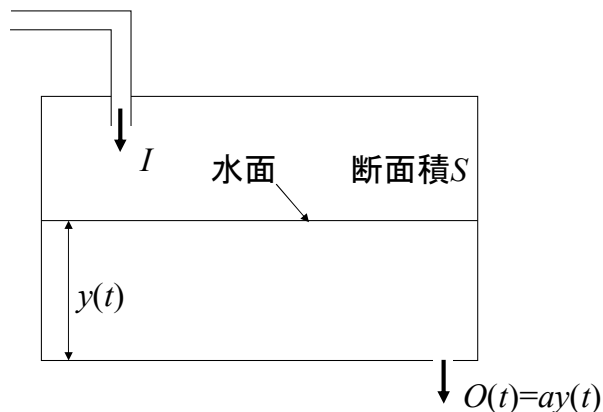


図 1

問題 2

(1) (x, y, z) 空間における曲面 $S: z = x^2 + y^2$ が点 $A (1, -1, 2)$ において接平面 P と接しているとき、以下の間に答えよ。

(a) 曲面 S をパラメータ表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ で表わせ。

(b) 点 A における曲面 S の法線ベクトル

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

を求めよ。

(c) 点 A と接平面 P 上の任意の点 $B (x, y, z)$ を結ぶベクトルが法線ベクトル \mathbf{n} と垂直であることを用いて、接平面 P の方程式を求めよ。

(2) ベクトル場 $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ であるとき、体積積分

$$\iiint_V \mathbf{F} dV$$

を求めよ。ここで V は図 2 に示すように、面 $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, z = 4$ によって囲まれた領域である。

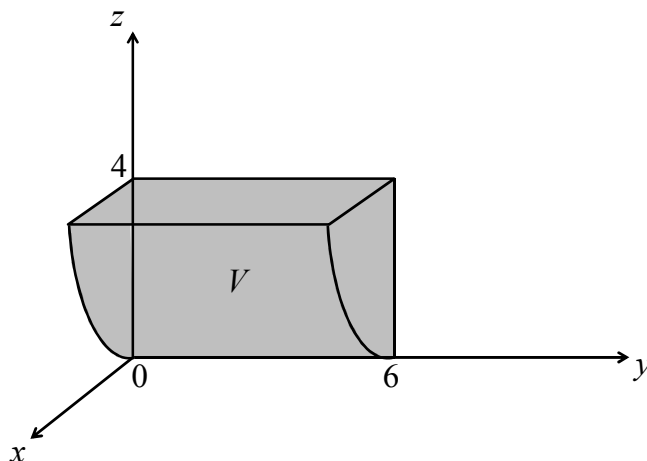


図 2

問題 3

ゾウ(E)、キツネ(F)、キリン(G)の 3 つの檻がある動物園において、適当な離散時点 $t = 0, 1, 2, \dots$ における見物客の流動が以下のように与えられているとする：

- ・ある時点 t にゾウ(E)の檻に居た見物客が、次の時点 $t + 1$ に

ゾウ(E)の檻に居る確率 $\phi_{E,E}$:	60%
キツネ(F)の檻に居る確率 $\phi_{E,F}$:	20%
キリン(G)の檻に居る確率 $\phi_{E,G}$:	20%
- ・ある時点 t にキツネ(F)の檻に居た見物客が、次の時点 $t + 1$ に

ゾウ(E)の檻に居る確率 $\phi_{F,E}$:	30%
キツネ(F)の檻に居る確率 $\phi_{F,F}$:	60%
キリン(G)の檻に居る確率 $\phi_{F,G}$:	10%
- ・ある時点 t にキリン(G)の檻に居た見物客が、次の時点 $t + 1$ に

ゾウ(E)の檻に居る確率 $\phi_{G,E}$:	30%
キツネ(F)の檻に居る確率 $\phi_{G,F}$:	10%
キリン(G)の檻に居る確率 $\phi_{G,G}$:	60%

このとき、正方行列 $M = \begin{bmatrix} \phi_{E,E} & \phi_{F,E} & \phi_{G,E} \\ \phi_{E,F} & \phi_{F,F} & \phi_{G,F} \\ \phi_{E,G} & \phi_{F,G} & \phi_{G,G} \end{bmatrix}$ を見物客の推移確率行列と呼ぶ。

以下の (1) から (4) に答えよ。

- (1) 時点 t の檻 i の見物客数を実数 $x_i(t)$ で表し、そのベクトルを $\mathbf{x}(t) = (x_E(t), x_F(t), x_G(t))$ とする。この時、見物客数の動学は以下の式で表される。

$$\mathbf{x}(t + 1) = M\mathbf{x}(t)$$

初期時点 $t = 0$ における各檻の見物客数が $\mathbf{x}(0) = (x_E(0), x_F(0), x_G(0)) = (700, 0, 0)$ であったとする。時点 $t = 1$ および $t = 2$ におけるゾウの檻(E)の見物客数 $x_E(1)$ および $x_E(2)$ を求めよ。

- (2) 推移確率行列 M の固有値および固有ベクトルを全て求めよ。
- (3) 問題 (2) の解を用いて行列 M を対角化せよ。
- (4) 問題 (1) の初期条件の下で、任意の時点 n における各檻の見物客数 $\mathbf{x}(n) = (x_E(n), x_F(n), x_G(n))$ を $\mathbf{x}(n) = \alpha^n \mathbf{a} + \beta^n \mathbf{b} + \mathbf{c}$ の形式で表せ。ただし、 α, β は 0 以上 1 以下の定数、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は 3 次元列ベクトルとする。

問題 4

ある食品会社で製造するパンの重さは、平均 400g、標準偏差 20g の正規分布に従う。この食品会社では、1 個 30 円の原価のパンを一日辺り 2000 個製造しており、製造されたパンのうち、重さが 375g 以上のものはいずれも 1 個 100 円で販売するが、375g 以下のものは出荷しない。このとき、以下の間に答えよ。ただし、平均 0、分散 1 の正規分布に従う確率変数の累積分布関数 $F(x)$ は以下を与える。

$$F(1.64) = \int_{-\infty}^{1.64} f(x) dx = 0.950$$

$$F(1.25) = \int_{-\infty}^{1.25} f(x) dx = 0.894$$

- (1) この食品会社では 375g 以下のパンは何%製造されるか。
- (2) この食品会社の製造するパンの一日辺りの売上と原価の差の期待値はいくらか。ただし、出荷したパンは全て売れるものとする。
- (3) ある日に製造されたパンのうち、ランダムに抽出した 100 個の平均の重さは 390g であった。この結果からこの日に製造されたパンの母集団平均は 400g から減少しているといえるか。5%有意水準で検定せよ。