平成 29 年度

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻

博士課程前期 2 年の課程

【一般選抜】

数 学 試 験 問 題

平成 28 年 8 月 29 日

試験時間:9 時 30 分～11 時 30 分(120 分)

＜注意事項＞

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、**受験記号番号を記入**すること。
3. **大問 4 題について全て**解答すること。
4. **大問 1 題につき 1 枚の答案用紙を使用すること。** ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙 2 枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、**持ち帰らないこと**。

問題１

（１）関数 $f(x)=\dfrac{-\pi+2\sin^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ $\left(0\le x\le 2\right)$ について、次の問に答えよ。

(a) $y=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}(1-x)$ とするとき、$f(x)$を y を用いた式 $g(y)$に書き換えよ。

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ。

（２）次の微分方程式を解け。ただし、a と b は正の定数とする。

$$\frac{dn}{dt}=(a-bn)n$$

問題２

（1）直交座標系において x、y、z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ とするとき以下の問に答えよ。

(a) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について、以下の等式が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})$$

(b) ベクトル場 $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + (3z^3 - x)\boldsymbol{k}$ のとき、原点から点 $(1,1,1)$ までの線積分、

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ。ここで Cは 原点と点 $(1,1,1)$ を結ぶ線分であるとする。

（2）ベクトル $\boldsymbol{F}$ とベクトル $\boldsymbol{G}$ が次式の関係を満たすとする。

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot dr = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \iint_S \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで、曲面 S は閉曲線 C を境界とする単連結な曲面であり、ベクトル $\boldsymbol{F}$ は S 上で少なくとも一階導関数がなめらかな C^1 級関数であるとする。このとき、

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}$$

となることを示せ。

問題３

次の 3×3 対称行列：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b & -a & 0 \\ -a & 2b & -a \\ 0 & -a & b \end{bmatrix}$$

(ただし、a、b はいずれも実数とする) について、（1）から（3）に答えよ。

（1）　行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ。

（2）　行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が重解を持たないためにa、bが満たすべき条件を書き下せ。

（3）　$a = 2$、$b = 7$とする。このとき、行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ。

問題４

AとBとは毎日8時30分頃にある場所Cにやって来る。AとBのCへの到着時刻の分布はそれぞれ図１、２に概形を示す確率密度関数 $f_1(t)$、$f_2(t)$に従うことがわかっている。ここで、tは8時30分以後の分単位の時間を表す。AとBとはそれぞれ独立にCにやって来るものとして以下の問に答えよ。

（１） 図１、２中の a_1、b_2 の値を求めよ。
（２） $f_1(t)$、$f_2(t)$の式を求めよ。
（３） AがCへ到着する時間の平均と分散を求めよ。
（４） Aが8時31分以前にCへ到着する確率を求めよ。
（５） 8時31分の時点でCにAだけがいる確率を求めよ。

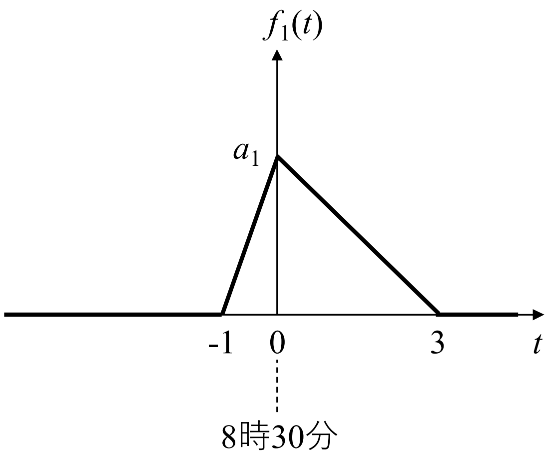

図１

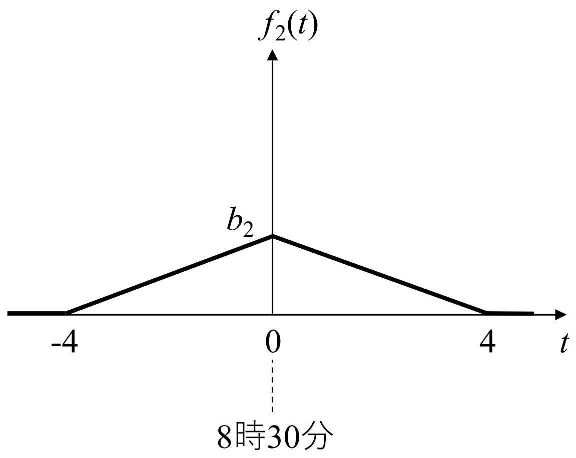

図２