平成 28 年度

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻

博士課程前期 2 年の課程

【一般選抜（第 2 次募集）】
【外国人留学生等特別選抜】

数 学 試 験 問 題

平成 28 年 3 月 1 日

試験時間：9 時 30 分～11 時 30 分（120 分）

＜注意事項＞

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、**受験記号番号を記入**すること。
3. **大問 5 題中、4 題を選択**して答えること。
4. **大問 1 題につき 1 枚の答案用紙を使用すること。** ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙 2 枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、**持ち帰らないこと**。

問題１

（１）下記の関数の最大値と最小値を求め、それらが有限の値をとる場合は、そのときの x を求めよ。

$$f(x)=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x} \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

（２）下記の広義積分を求めよ。

$$\int_1^{\infty}\left\{\log(x+a)-\log x-\frac{a}{x+a}\right\}dx \quad (a>0)$$

問題２

（１）下記の微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$-3\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=y^4\cos x \quad (x>0)$$

⒜ $u=y^{-3}$ とおいたとき、u と x の微分方程式を求めよ。

⒝ u を含まない元の微分方程式の一般解を求めよ。

（２）下記の偏微分方程式について、以下の問いに答えよ。

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y)$$

⒜ $P(x,y)=1$、$Q(x,y)=0$、$R(x,y)=x+y$ のとき、一般解を求めよ。

⒝ $P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$, $R(x,y)=x$ のとき、一般解を求めよ。

問題３

直交座標系において x、y、z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ とするとき以下の問いに答えよ。

（１）スカラー場 $f = xyz$、ベクトル場 $\boldsymbol{A} = xy\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + yz^2\boldsymbol{k}$ について、点 P $(1, -1, 1)$ における以下の偏微分を求めよ。

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial \mathrm{z}}(f\boldsymbol{A})$$

（２）点 Q $(1, -1, 2)$における楕円面 $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ の法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ と接平面の方程式を求めよ。

（３）ベクトル場 $\boldsymbol{B} = 4xz\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ について、以下の面積分を求めよ。

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

ただし、S は面 $x = 0$、$x = 1$、$y = 0$、$y = 1$、$z = 0$、$z = 1$、により囲まれた立方体の表面であり、法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向は立方体の内部から外部へ向かう方向とする。

問題４

次の３×３対称行列：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

（ただし，a, b, c はいずれも実数とする）について、（１）から（５）に答えよ。

（１）行列 $\boldsymbol{A}$ から i 番目の行と j 番目の列を取り除いてできる ２×２ 行列の行列式に $(-1)^{(i+j)}$ を乗じたものを行列 $\boldsymbol{A}$ の (i, j) 余因子と呼び、A_{ij} で表す。$\boldsymbol{A}$ の全ての余因子、すなわち $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}$ および A_{33} を求めよ。

（２）行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を求めよ。

（３）行列 $\boldsymbol{A}$ が逆行列を持つために a, b, c が満足すべき条件を書き下せ。

（４）（３）の条件が満たされるとして、行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ。

（５）$a > b > 0 > c$ とする。このとき、行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ。

問題５

ある部品には$\frac{1}{5}$の割合で不良品が含まれる。この部品は大きな仕切りに分けられて保管されており、仕切りのうちn個の部品を無作為に選んで検査をして選んだ部品に含まれる不良品の数が 2 個以上であればその仕切りを不合格とする。以下の問いに答えよ。ただし、n は 2 以上の整数とし、問（1）～（3）ではn=6 とせよ。仕切りに含まれる部品の数はnより十分大きいものとする。

（1）選んだ部品に含まれる不良品の数の平均を求めよ。

（2）選んだ部品に含まれる不良品の数の標準偏差を求めよ。

（3）仕切りが合格となる確率を求めよ。

（4）仕切りが合格となる確率が$\frac{4}{5}$より大きくなるnの範囲を求めよ。