

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻
博士課程前期2年の課程
平成27年度
【外国人留学生等特別選抜】
【9月卒業見込者・既卒者を対象とする選抜】

数 学 試 験 問 題

平成27年8月26日

試験時間:9時30分～11時30分(120分)

<注意事項>

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、受験記号番号を記入すること。
3. 大問5題中、4題を選択して答えること。
4. 大問1題につき1枚の答案用紙を使用すること。ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙2枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、持ち帰らないこと。

問題 1

- (1) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

- (2) 平面 $z = 2x + 3y + k$ と曲面 $z = x^2 + 2xy + y^2$ が点 (x_0, y_0, z_0) で接するとき、接点の座標 (x_0, y_0, z_0) と k の値を求めよ。

問題2

次の微分方程式を解け。

$$(1) \quad (2x^2 + 5y)dx + (5x + y - 2)dy = 0$$

$$(2) \quad 3\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9 = 0$$

問題3

ベクトル関数 $\mathbf{A}(t) = 3t^2\mathbf{i} - (t+4)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{B}(t) = \sin t\mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j} - 3\cos t\mathbf{k}$ について以下の問に答えよ。ただし、 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} は互いに直交する単位ベクトルである。

(1) $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ 、 $\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}$ 、 $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ 、 $\frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2}$ を求めよ。

(2) 以下の公式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

(3) $t=0$ における $\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ を求めよ。

問題4

(1) 次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ。

$$B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 & -3 \\ -\sqrt{3} & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

問題5

1 から 6 の目がある赤と青のサイコロがある。赤のサイコロはいずれの目も出る確率は等しいが、青のサイコロは偏っていて、 n (n は 1 から 6) の目が出る確率は n に比例する。なお、これらのサイコロの出る目は独立である。

(1) 青のサイコロ 1 つを 1 回転がす時の出る目の平均と分散を求めよ。

赤のサイコロ 1 つと青のサイコロ 1 つを一度に 1 回転がす時、

(2) 出る目の和の平均と分散を求めよ。

(3) 出る目の和が 6 となる確率を求めよ。

(4) 出る目の積の平均を求めよ。

赤のサイコロ 2 つと青のサイコロ 3 つを一度に 1 回転がす時、

(5) 出る目の和の平均と分散を求めよ。