

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻

博士課程前期2年の課程

平成27年度 一般選抜(二次募集)

## 数学試験問題

平成27年3月2日

試験時間:9時30分～11時30分(120分)

### <注意事項>

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、受験番号を記入すること。
3. 大問5題中、4題を選択して答えること。
4. 大問1題につき1枚の答案用紙を使用すること。ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙2枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、持ち帰らないこと。

問題1

- (1)  $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, 0 \leq y \leq 3x\}$  のとき、次の積分を求めよ。また、積分範囲を図示せよ。

$$\iint_D 3x + y \, dx dy$$

- (2) 関数  $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2$  について、極値を求めよ。

## 問題2

(1) 次の微分方程式を解け。

$$xy \frac{dy}{dx} + x^2 + y^2 = 0$$

(2) 温度が  $100^{\circ}\text{C}$  である物体を  $a^{\circ}\text{C}$  ( $a < 100$ ) の気体中に置いたところ、物体の温度は、20分経過後に  $60^{\circ}\text{C}$ 、40分経過後に  $40^{\circ}\text{C}$  になった。物体が周囲の気体によって冷却される速度は物体と気体の温度差に比例するものとして、 $a$  を求めよ。ただし、物体の温度分布は一様とし、物体が冷却される過程において  $a$  は常に一定であるとする。

### 問題 3

(1) 3次元  $(x, y, z)$  空間において,  $f$  をスカラー場,  $\mathbf{A}$  をベクトル場とするとき, 以下の公式が成り立つことを示せ.

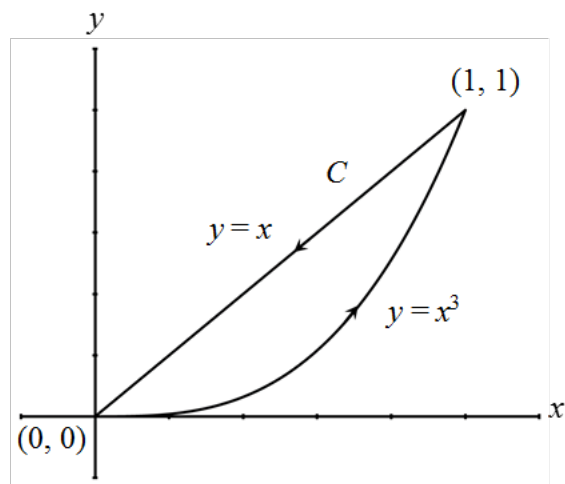
(a)  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$

(b)  $\operatorname{rot} (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A}$

(2) 以下の線積分を求めよ.

$$\int_C y^3 dx + (2x^2 + 3xy^2) dy$$

ここで,  $C$  は下図のように,  $y = x^3$  のグラフに沿う点  $(0, 0)$  から点  $(1, 1)$  への経路と,  $y = x$  のグラフに沿う点  $(1, 1)$  から点  $(0, 0)$  への経路からなる閉曲線とする.



#### 問題4

- (1) 一定数有権者が政党 A、B、C のいずれかに投票する。今回選挙で政党 A に投票した有権者の 70%、20%、10% は次回選挙でそれぞれ政党 A、B、C に投票する。今回選挙で政党 B に投票した有権者の 10%、80%、10% は次回選挙でそれぞれ政党 A、B、C に投票する。今回選挙で政党 C に投票した有権者の 30%、30%、40% は次回選挙でそれぞれ政党 A、B、C に投票する。これらの投票行動は毎回同じとし、第  $n$

回選挙での各政党得票率をベクトル  $p_n = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$  で表す。3×3 の正方行列  $T$ 、 $p_n$ 、 $p_{n+1}$  を

用いて得票率の変化を表せ。

- (2)  $p_{n+1} = p_n$  となるとき得票率は定常状態にあるという。定常状態における政党 B の得票率を求めよ。

### 問題5

ある部品の無作為標本 50 個について各々の寸法  $l$  を測定したところ、下表の結果を得た。

寸法  $l$  の測定値はいずれも整数である。

寸法 $l$	度数
$40 \leq l < 50$	0
$50 \leq l < 60$	2
$60 \leq l < 70$	7
$70 \leq l < 80$	13
$80 \leq l < 90$	11
$90 \leq l < 100$	8
$100 \leq l < 110$	7
$110 \leq l < 120$	2
$120 \leq l < 130$	0

このとき、以下の問いに答えよ。ただし、平均 0、分散 1 の正規分布  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  に従う確率変数の累積分布関数  $F(x)$  は以下を与える。

$$F(1.96) = \int_{-\infty}^{1.96} f(x) dx = 0.9750$$

- (1) この標本の寸法  $l$  の累積度数分布図を作図し中央値を求めよ。
- (2) この標本の寸法  $l$  の平均と標準偏差を求めよ。
- (3) この部品の寸法  $l$  の母平均の 95% 信頼区間を求めよ。