

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻

博士課程前期2年の課程

平成24年度 一般選抜(二次募集)

## 数学試験問題

平成24年2月28日

試験時間:9時30分～11時30分(120分)

### <注意事項>

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、受験番号を記入すること。
3. 大問5題中、4題を選択して答えること。
4. 大問1題につき1枚の答案用紙を使用すること。ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙2枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、持ち帰らないこと。

## 問題 1

(1) 次の微分方程式を解け.

$$2x^2 y \frac{dy}{dx} + x(1 + y^2) = 0$$

(2) 次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 - y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_2 - y_3 \end{cases}$$

## 問題 2

$W$ を $z=0$ ,  $z=\exp(x^2+y^2)$ ,  $x^2+y^2=1$ ,  $x^2+y^2=2$  で囲まれた三次元領域とする. また,  $\mathbf{F}=(4x-xy)\mathbf{i}-y\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$ をベクトル場とする. ここで  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ はそれぞれ $x$ ,  $y$ ,  $z$ 方向の単位ベクトルである.

- (1)  $W$ の体積を求めよ.
- (2)  $\operatorname{div}\mathbf{F}$ を求めよ.
- (3)  $W$ から流出するベクトル場 $\mathbf{F}$ の流束を求めよ.

### 問題 3

- (1) 放物面  $z = x^2 + y^2$  上の点  $(a, b, a^2 + b^2)$  における接平面を求めよ.
- (2) 放物面  $z = x^2 + y^2$ , 円柱面  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , および(1)で求めた接平面で囲まれる立体の体積  $V$  を求めよ. ただし, この立体は円柱面  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  の内側にあるものとする.
- (3) (2)で求めた  $V$  の最小値を求めよ.

問題 4

(1)  $A$  の固有値と固有ベクトル(ノルム 1)を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)  $A^n$  を求めよ。

## 問題 5

次の問いに答えなさい。

(1) 確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は独立であり、同じ確率分布(平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$ )に従うものと仮定する。

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

について、 $S^2$  の期待値  $E(S^2)$  を  $\mu$  と  $\sigma^2$  を用いて表せ。

なお、

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

である。

(2) 確率変数  $X$  が一様分布  $U(0,1)$  に従うとき、次の関数で表される変数  $Y$  の確率密度関数  $g(y)$  を求めよ。

(a)  $Y = X^2 + 2$

(b)  $Y = \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right)$

ただし、 $U(0,1) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$