

東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻

博士課程前期2年の課程 二次募集

平成22年度 外国人留学生等特別選抜

数 学 試 験 問 題

平成23年2月28日

試験時間:9時30分～11時30分(120分)

<注意事項>

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、受験番号を記入すること。
3. 大問5題中、4題を選択して答えること。
4. 大問1題につき1枚の答案用紙を使用すること。ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙2枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、持ち帰らないこと。

問題 1

(1) 次の微分方程式を解け.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

(2) 次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + 6y_1 + \frac{dy_2}{dx} + 3y_2 = 0 \\ \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} + y_2 = 0 \end{cases}$$

問題 2

$\mathbf{A} = (y - 2xz)\mathbf{i} - (3x + z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -(2y + xz)\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - (x^2 - y)\mathbf{k}$ をベクトル場, C を始点 $(0, 0, 0)$ から終点 $(1, 1, 2)$ までを結んだ直線とする. ここで \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} はそれぞれ x , y , z 方向の単位ベクトルである.

(1) ベクトル場 \mathbf{A} の C に沿った線積分を求めよ.

(2) ベクトル場 $\mathbf{U} = \mathbf{A} + a\mathbf{B}$ が $\mathbf{U} = \text{grad}\varphi$ で与えられるスカラー・ポテンシャル φ を持つように定数 a を定めよ. また, そのときのスカラー・ポテンシャル φ , 及び, ベクトル場 \mathbf{U} の C に沿った線積分を求めよ.

問題 3

- (1) 区間 $0 \leq x \leq 1$ において関数 $y = e^x$ を直線 $y = ax + b$ で近似したい. 下記に与える誤差 $E(a, b)$ を最小にする a , b の値を求めよ.

$$E(a, b) = \int_0^1 \{e^x - (ax + b)\}^2 dx$$

- (2) D は連立方程式 $x^2 + y^2 \leq 2$, $(x - 1)^2 + y^2 \geq 1$ で与えられる平面領域であるとする. このとき, D の面積を求めよ.

問題 4

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトル(ノルム 1)を全て求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) A^n を求めよ。

(3) A^0 を単位行列とすると $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ を求めよ。

問題 5

(1) 図 1 と図 2 のそれぞれの回路 A、回路 B における箱 S_i と T_i ($i=1,2,\dots,m$) はヒューズを表す。それらのヒューズに電流が流れると、箱に記載の確率 p_S, p_T でヒューズは切れる。回路 A、B に電流が流れる確率 p_A, p_B を求めなさい。なお $0 < p_S < 1$ 、 $0 < p_T < 1$ とする。

(2) 図 1、図 2 の回路において、 $m=2$ としたときの回路 A、B に電流が流れる確率 p_A と p_B の大小関係を示しなさい。

(3) 確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ とするとき、確率変数 $Y = 2X + 3$ の確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めなさい。ここで

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

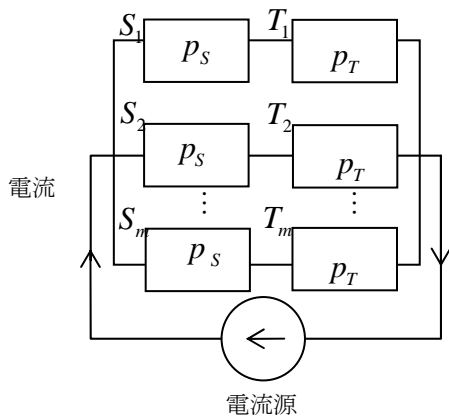


図 1 回路 A

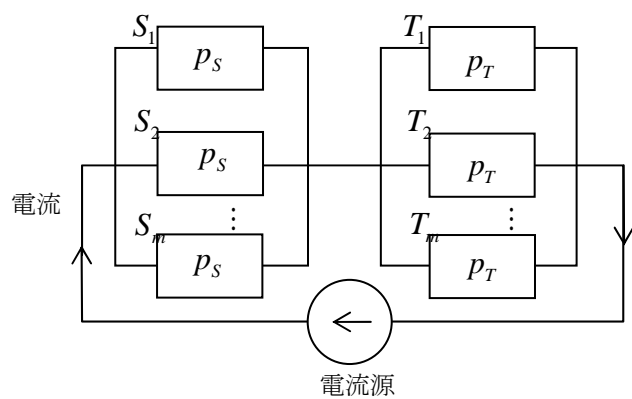


図 2 回路 B