東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻
博士課程前期 2 年の課程
平成 22 年度　外国人留学生等特別選抜

数　学　試　験　問　題

平成 22 年 8 月 23 日

試験時間:9 時 30 分～11 時 30 分（120 分）

＜注意事項＞

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、**受験番号を記入**すること。
3. **大問 5 題中、4 題を選択**して答えること。
4. **大問 1 題につき 1 枚の答案用紙を使用すること。** ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙 2 枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、**持ち帰らないこと**。

問題１

(1) 次の微分方程式を解け。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

(2) 次の連立微分方程式を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 - x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

問題２

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = zx\boldsymbol{i} + \frac{y^2}{x}\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$，及び $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ $(z \geq 0)$ で与えられる曲面 S を考える。

ここで， $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x，y，z 方向の単位ベクトルである。

(1) $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\varphi$ となるスカラー・ポテンシャル φ が存在しないことを示せ。

(2) 曲面 S 上の点(2, 1, 2)における単位法線ベクトルを求めよ。

(3) ストークスの定理

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{\mathrm{S}} rot\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{dS},$$

が成立することを示せ。ここで，C は xy 平面と曲面 S の境界である。

問題３

（１）すべての点で微分可能な関数 $f(x)$ は次の式を満たす。$f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = f(-x) + 2x$$

$$f(x)f'(x) + f(-x)f'(-x) = 6x^2 + 2$$

（２）点 $P(x, y, z)$ と $Q(x, y, 0)$ において、x, y, z は時間 t の関数であらわされる。

$$x = e^{2t}\cos t,\ y = e^{2t}\sin t,\ z = t + 1$$

(a) 点 Q が $t = 0$ から $t = a\ (a > 0)$ まで移動した道のりを求めよ。

(b) $t = 0$ から $t = a\ (a > 0)$ までに線分 PQ がえがく図形の面積を求めよ。

問題４

（１）　行列 $A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.2\\ 0.3 & 0.8\end{pmatrix}$ について、A^n を求めよ。

（２）　一定数の消費者が毎期パソコン A または B のいずれかを購入するパソコン市場を考える。第 n 期のパソコン販売総数に占める第 n 期のパソコン A, B の販売台数の比率をそれぞれ a_n、b_n とする $(a_n + b_n = 1)$。第 $n-1$ 期に製品 A を購入した消費者の 70%は、第 n 期も製品 A を購入する。第 $n-1$ 期に製品 A を購入した消費者の 30%は、第 n 期には製品 B を購入する。第 $n-1$ 期に製品 B を購入した消費者の 80%は、第 n 期も製品 B を購入する。第 $n-1$ 期に製品 B を購入した消費者の 20%は、第 n 期には製品 A を購入する。(a_n, b_n) と (a_{n-1}, b_{n-1}) の関係を行列を用いて表せ。さらに、n が十分大きいとき、a_n / b_n を求めよ。

問題５

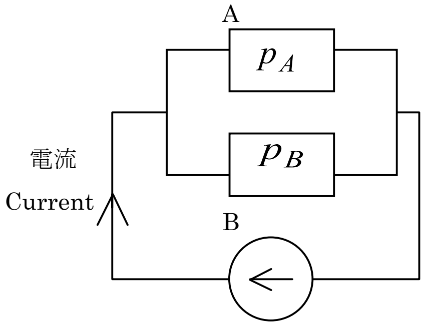
(1) 図 1 の回路における箱 A と B はヒューズを表す。それらのヒューズに電流が流れると、箱に記載の確率 p_A, p_B でヒューズは切れる。回路に電流が流れる確率 p_1 を求めよ。

(2) 図 2 の回路に電流が流れる確率 p_2 を求めなさい。なお、各箱はヒューズを表し、箱に記載のパラメータ $p_A, p_B, \cdots, p_E$ はそのヒューズに電流が流れたときのヒューズが切れる確率である。

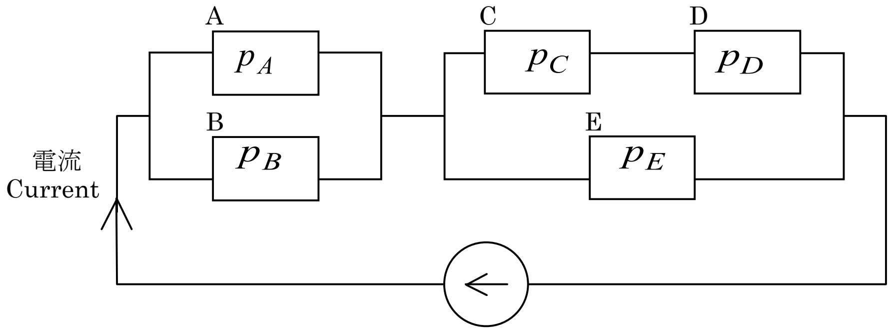
(3) 確率変数 $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_n$ は独立であり、同じ確率分布(平均 μ 、分散 σ^2)に従うものと仮定する。

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$$

について、$\overline{\mathrm{X}}$ の期待値 $\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})$ と分散 $\mathrm{V}(\overline{\mathrm{X}})$ を μ と σ^2 を用いて表せ。



電流源
Current Source
図 1
Fig.1



電流源
Current Source
図 2
Fig.2