問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = e^{-x^2}$ に、点 $\left(\alpha, 0\right)$ から接線を引くこととする。2 本の異なる接線が引けるのは、定数 α がどの値を取るときか、その値の範囲を示せ。

(2) 次の曲線:

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le \tfrac{\pi}{2})$$

の長さを求めよ。

(3) x 軸を動く点 P と Q の t 秒後の速度は $\sin(\pi t)$ と $2\sin(2\pi t)$ である。$t = 0$ の時 P と Q は原点にいる。出発後初めて P と Q が重なるまでに Q が動いた道のりを求めよ。

問題２

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $f(x,y,z)=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ について以下の問いに答えなさい。

(a) 点 $P=(2,-1,2)$ における関数 $f(x,y,z)$ の最大増加の方向 $\mathbf{A}$ を求めよ。なお $\mathbf{A}$ のノルムは1とする。

(b) 点 $P=(2,-1,2)$ における方向 $\mathbf{A}$ の向きの方向微分係数を求めよ。

(2) 関数 $g(x,y,z), h(x,y,z)$ について次式が成立することを示せ。

$$div(grad\, g\times grad\, h)=0$$

(3) ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z)=(2x,\ y^2,\ z^2)$ を考える。球面 $x^2+y^2+z^2=1$ で囲まれる領域 V について、

$$\iiint_V div\,\mathbf{F}\,dV$$

を求めなさい。

問題３

次の問いに答えよ。

(1) 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 4x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$$

問題４

行列

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

について、以下の各問いに答えよ。

(1) 行列Aの固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

(2) 行列Aの指数関数e^Aを

$$e^A=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}$$

と定義する。ただし、A^0は単位行列である。e^Aを求めよ。

問題５

確率変数 X の確率密度関数が以下の式で与えられるものとする。

$$f(x) = ae^{-|x|} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

ただし a は定数である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求め、X の累積分布関数を求めよ。

(2)　$f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　$Y = |X|$ の確率密度関数を求めよ。