東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻
博士課程前期 2 年の課程
平成 21 年度　一般選抜
平成 20 年　外国人留学生等特別選抜

数　学　試　験　問　題

平成 20 年 8 月 25 日

試験時間:9 時 30 分～11 時 30 分（120 分）

＜注意事項＞

1. “始め”の合図があるまで，本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に，必ず，**受験番号を記入**すること。
3. **大問 5 題中，4 題を選択**して答えること。
4. **大問 1 題につき 1 枚の答案用紙を使用すること。** ただし，表側に書ききれない場合は，裏側に記載しても良い。答案用紙 2 枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後，試験監督の指示があるまで退出せず，着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き，**持ち帰らないこと**。

問題１

(1)　関数$U(x_1,x_2)=Ax_1^m x_2^{1-m}$について，次の問いに答えよ。なお，$A>0$，$1>m>0$とする。

(a)　$x_1P_1+x_2P_2=R$の条件下で，関数$U(x_1,x_2)$を最大にするx_1とx_2の値x_1^*，x_2^*を求めよ。なお，$R>0$，$P_1>0$，$P_2>0$とする。

(b)　$\dfrac{P_1}{P_2}$の値が 2 倍になるとき，(a)で求めたx_1^*とx_2^*の比$\dfrac{x_1^*}{x_2^*}$はどのように変化するか答えよ。

(c)　(a)で求めたx_1^*，x_2^*における関数$U(x_1,x_2)$の値を求めよ。また，このUの値はRに関してどのように変化するかを述べよ。

(2)　曲線$y=\dfrac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$について，$x=0$から$x=t$（$t>0$）までの長さを求めよ。

問題２

次の問いに答えよ。なお，ベクトル $\boldsymbol{i}$ ， $\boldsymbol{j}$ ， $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸の方向の単位ベクトルとする。

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{b}=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ について， $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ と $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を求めよ。

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ， $\boldsymbol{e}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ のつくる平面に平行で，ベクトル $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xyz\boldsymbol{i}+3x^2y\boldsymbol{j}+(xz^2-y^2z)\boldsymbol{k}$ について，$\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ と $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ を求めよ。

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{G}(x,y,z)=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ について，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の $z\geq 0$ の部分および平面 $z=0$ で囲まれる領域 V について，$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{G}dV$ を求めよ。

問題３

(1) 次の微分方程式を解け。ただし，$x>1$とする。

$$(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$$

(2) 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。ここで，a，b は 0 でない定数とする。

$$a\frac{dx}{dt}=-(x-y)$$

$$b\frac{dy}{dt}=x-y$$

問題４

行列

$$A=\begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。ただし s は実数であるとする。

(1)　A の固有値と大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ。

(2)　A が正定値となるための s の条件を求めよ。

(3)　s が(2)の条件を満たすとき，$R^2=A$ となる行列 R を求めよ。

問題５

確率変数 X の確率密度関数が以下の式で与えられるものとする。

$$f(x)=\begin{cases} a & (0 \le x \le 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ただし a は定数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　X の期待値，分散，累積分布関数を求めよ。

(3)　$Y = X^2$ とおくとき，Y の累積分布関数を求めよ。