東北大学大学院工学研究科技術社会システム専攻
博士課程前期2年の課程
平成20年度　一般選抜
平成19年　外国人留学生等特別選抜

数 学 試 験 問 題

平成19年8月29日

試験時間:9時30分～11時30分(120分)

＜注意事項＞

1. “始め”の合図があるまで、本冊子を開かないこと。
2. 答案用紙に、必ず、**受験番号を記入**すること。
3. **大問5題中、4題を選択**して答えること。
4. **大問1題につき1枚の答案用紙を使用すること。** ただし、表側に書ききれない場合は、裏側に記載しても良い。答案用紙2枚にわたって書かないこと。
5. 答案用紙提出後、試験監督の指示があるまで退出せず、着席していること。
6. 問題用紙は回収するので机の上に置き、**持ち帰らないこと**。

問題 1

次の問いに答えよ。

(1) 楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3a^2}+\dfrac{z^2}{3a^2}=1$ の体積を求めよ。

(2) 上記楕円体の表面上の点 $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ における接平面の式ならびにその法線の式を求めよ。ただし、$x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0,\ z_1 \neq 0$ とする。

問題２

ベクトル場$F(x,y)=\left(p(x,y),q(x,y)\right)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$について次の問いに答えなさい。

(1)　図 1 (a)の直線C_1に沿って点$(0,1)$から点$(1,0)$までの$F(x,y)$の線積分を求めなさい。

(2)　図 1 (b)の閉曲線Cに沿って$F(x,y)$の線積分を求めなさい。ここで、閉曲線Cの向きは反時計回りである。なお次式に示すグリーンの公式を利用しても良い。

$$\int_C (pdx+qdy)=\iint_A\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$$

ここで、Aは閉曲線Cに囲まれた領域であり、閉曲線Cの向きはその左側に領域Aが存在するように定められている。

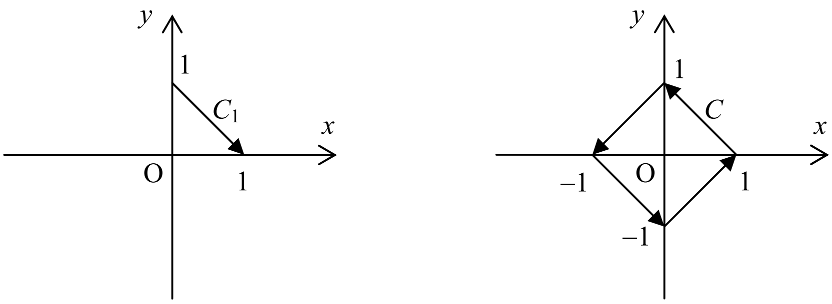

図 1 (a)　　図 1 (b)

問題３

次の問いに答えよ。

(1)　次の連立微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dx}{dz} = x - 2y$$
$$\frac{dy}{dz} = -3x + 2y$$

(2)　図 2 に示すように、長さ L の金属棒が、単位長さ当たり一定の熱量 q_0 で発熱している。その金属棒の両端を一定温度 T_0 に固定した場合の金属棒内の温度分布を表す式を求めよ。また、解の様子を図示せよ。ここで、棒の位置 x における発熱 $q(x)$ と温度 $T(x)$ の関係を表わす定常状態の熱伝導方程式は

$$a\frac{d^2T(x)}{dx^2} + q(x) = 0$$

で与えられるとする。

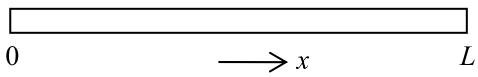

図 2

問題４

行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

について、以下の各問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

(2) $A = S\Lambda S^{-1}$ を満たす行列 S と対角行列 Λ を求めよ。

(3) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$$

ただし、A^0 は単位行列である。

問題５

確率変数 X の確率密度関数が以下の式で与えられるものとする。

$$f(x)=\begin{cases} -a(x^2-1) & \left(-1\le x\le 1 \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(\text{その他}\right) \end{cases}$$

ただし a は正の定数である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求め、X の累積分布関数を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた値のとき、X の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ。

(3)　X の尖度 k は、

$$k=\frac{E\left(\left(X-\mu\right)^4\right)}{\sigma^4}$$

で定義される。ここで、$E\left(\ \right)$ は期待値を表す。X の尖度 k を求めよ。